СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

линейные и более сложные

учебное пособие для школьников и поступающих в вузы

Автор
Трепачёв Дмитрий

2025 год, v1.0.0

Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от пятиклассников, которые только начинают знакомиться с алгеброй, до выпускников, готовящихся к ЕГЭ и поступлению в вузы.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Почему именно системы уравнений? Потому что это одна из самых важных тем в школьной математике. Системы уравнений встречаются везде: в текстовых задачах, в геометрии, в физике, в экономике. Умение решать системы — это навык, который пригодится не только на уроках алгебры, но и в реальной жизни.

В школьных учебниках системы уравнений обычно изучаются постепенно: сначала линейные системы, потом системы с квадратными уравнениями, потом более сложные случаи. Но часто эти темы разбросаны по разным классам, и ученику трудно увидеть общую картину. Да и задач на отработку каждого метода обычно не хватает.

В этой книге я собрал все основные типы систем уравнений, которые изучаются в школе, в одном месте:

- методы решения линейных систем (подстановка, сложение, графический метод);
- текстовые задачи, которые решаются с помощью систем линейных уравнений;
- системы с параболой и прямой;
- системы с обратной пропорциональностью (гиперболой) и прямой;
- системы с окружностью и прямой;
- системы с суммой квадратов и суммой;
- системы с суммой квадратов и произведением.

Каждому типу систем посвящена отдельная глава с теорией, подробными примерами и большим количеством задач. Все примеры подробно разобраны, чтобы было понятно, какой способ применять и почему. Задачи расположены от простых к сложным, чтобы ученик мог постепенно наращивать уровень сложности.

Эта книга пригодится не только моим ученикам, но и всем, кто хочет разобраться в теме самостоятельно. А ещё я буду рад, если другие репетиторы станут использовать её на своих занятиях — берите свободно, пользуйтесь, задавайте побольше примеров своим ученикам.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть и другие пособия по математике и физике — всё, что я наработал за годы преподавания, а также научно-популярные книги, написанные мною для тех учеников, которые хотят знать больше про историю науки и окружающий мир.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если вам или вашему ребёнку нужна помощь — милости прошу!

Удачи в изучении математики!

Дмитрий Трепачёв

Оглавление

Метод подстановки

Теория

В этой главе мы познакомимся с одним из основных методов решения систем уравнений — методом подстановки. Его суть проста: из одного уравнения выражаем одну переменную через другую и подставляем полученное выражение во второе уравнение.

Алгоритм метода подстановки:

1. Из одного уравнения выражаем одну переменную через другую.
2. Подставляем полученное выражение во второе уравнение.
3. Решаем получившееся уравнение с одной переменной.
4. Найденное значение подставляем в выражение для второй переменной.
5. Записываем ответ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Обе переменные в первой степени

Пусть нам нужно решить систему:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим y через x:

$$y = 7 - x$$

Подставляем $y = 7 - x$ во второе уравнение:

$$2x - (7 - x) = 2$$

Раскрываем скобки:

$$2x - 7 + x = 2$$

$$3x - 7 = 2$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

Подставляем $x = 3$ в выражение $y = 7 - x$:

$$y = 7 - 3 = 4$$

Ответ: $(x, y) = (3, 4)$.

Пример 2

Другой способ выражения

Решим ту же систему, выразив x через y:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$x = 7 - y$$

Подставляем во второе:

$$2(7 - y) - y = 2$$

$$14 - 2y - y = 2$$

$$14 - 3y = 2$$

$$-3y = 2 - 14 = -12$$
$$y = 4$$

Подставляем $y = 4$ в $x = 7 - y$:

$$x = 7 - 4 = 3$$

Получили тот же ответ. Способ выражения не важен — главное, чтобы было удобно.

Пример 3

Когда коэффициенты дробные

Решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

Работать с дробями неудобно, поэтому для начала нужно от них избавиться. Для этого каждое уравнение умножим на число, которое превратит коэффициенты в целые.

Первое уравнение содержит дроби со знаменателями 2 и 3. Наименьшее общее кратное (НОК) чисел 2 и 3 равно 6. Умножим обе части первого уравнения на 6:

$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{y}{3} = 6 \cdot 2$$
$$3x + 2y = 12.$$

Второе уравнение содержит дроби со знаменателями 4 и 2. НОК чисел 4 и 2 равно 4. Умножим обе части второго уравнения на 4:

$$4 \cdot \frac{x}{4} - 4 \cdot \frac{y}{2} = 4 \cdot 1$$
$$x - 2y = 4.$$

Теперь мы имеем систему с целыми коэффициентами, которая гораздо проще исходной:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

И далее мы можем решать систему уже с целыми числами подобно тому, как мы это делали в предыдущих примерах.

Пример 2

Когда нужно раскрыть скобки

Решим систему:

$$\begin{cases} 2(x + 3) - (y - 2) = 13 \\ 3(x - 1) + 2(y + 1) = 10 \end{cases}$$

Прежде чем применять метод подстановки, упростим каждое уравнение, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые.

1. Упрощаем первое уравнение:

$$2(x + 3) - (y - 2) = 13$$

Раскрываем скобки. Помним, что минус перед скобкой меняет знаки внутри неё:

$$2x + 6 - y + 2 = 13$$
$$2x - y + 8 = 13$$

Переносим 8 в правую часть:

$$2x - y = 13 - 8$$
$$2x - y = 5.$$

2. Упрощаем второе уравнение:

$$3(x - 1) + 2(y + 1) = 10$$

Раскрываем скобки:

$$3x - 3 + 2y + 2 = 10$$

$$3x+2y-1=10$$

Переносим -1 в правую часть:

$$3x+2y=10+1$$

$$3x+2y=11.$$

3. Получили систему в удобном виде:

$$\begin{cases}2x-y=5\\3x+2y=11\end{cases}$$

Далее решаем эту систему, применяем метод подстановки.

Задачи

1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}x+y=5\\x-y=1\end{cases}$ **5)** $\begin{cases}4x+y=10\\x-3y=-4\end{cases}$ **9)** $\begin{cases}3x+4y=10\\2x-5y=-1\end{cases}$

2) $\begin{cases}x+y=7\\2x-y=2\end{cases}$ **6)** $\begin{cases}5x-2y=1\\2x+y=4\end{cases}$ **10)** $\begin{cases}7x-2y=15\\3x+5y=13\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x+y=8\\x-2y=1\end{cases}$ **7)** $\begin{cases}2x+3y=8\\3x-2y=-1\end{cases}$ **11)** $\begin{cases}5x+3y=14\\4x-7y=-5\end{cases}$

4) $\begin{cases}3x-y=5\\x+2y=4\end{cases}$ **8)** $\begin{cases}4x-3y=7\\5x+2y=3\end{cases}$ **12)** $\begin{cases}6x-5y=4\\8x+3y=18\end{cases}$

2. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}2(x-1)-3(y+2)=5\\x+2y=7\end{cases}$ **6)** $\begin{cases}7(x+3)+5(y-4)=21\\3x-4y=8\end{cases}$ **11)** $\begin{cases}4(x+3)+5(y-2)=13\\2(x-1)-3(y+4)=-5\end{cases}$

2) $\begin{cases}3(x+2)+2(y-1)=13\\2x-y=1\end{cases}$ **7)** $\begin{cases}2(x+3)+3(y-1)=12\\4x-5y=7\end{cases}$ **12)** $\begin{cases}3(x-2)-2(y+1)=4\\5(x+3)+4(y-2)=16\end{cases}$

3) $\begin{cases}4(x-3)-5(y+2)=-2\\3x+4y=10\end{cases}$ **8)** $\begin{cases}3(x-4)-2(y+5)=-1\\5x+3y=22\end{cases}$ **13)** $\begin{cases}6(x+1)+7(y-3)=21\\4(x-2)-5(y+3)=8\end{cases}$

4) $\begin{cases}5(x+1)+3(y-2)=14\\2x-3y=5\end{cases}$ **9)** $\begin{cases}4(x+2)+5(y-3)=18\\6x-7y=5\end{cases}$ **14)** $\begin{cases}8(x-4)+3(y+2)=15\\2(x+5)-6(y-1)=4\end{cases}$

5) $\begin{cases}6(x-2)-4(y+3)=8\\5x+2y=13\end{cases}$ **10)** $\begin{cases}2(x-1)-3(y+2)=5\\3(x+2)+(y-1)=7\end{cases}$ **15)** $\begin{cases}5(x+3)-4(y-2)=12\\7(x-1)+2(y+4)=19\end{cases}$

3. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3\\\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1\end{cases}$ **4)** $\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=6\\\frac{x}{6}-\frac{y}{5}=2\end{cases}$ **7)** $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{7}=3\\\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4\\\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=0\end{cases}$ **5)** $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=4\\\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1\end{cases}$ **8)** $\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=4\\\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=2\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=5\\\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1\end{cases}$ **6)** $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=5\\\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=2\end{cases}$ **9)** $\begin{cases}\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=5\\\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=3\end{cases}$

10) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=4\\ \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1\end{cases}$

11) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=5\\ \frac{x}{5}-\frac{y}{2}=0\end{cases}$

12) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=3\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{5}=2\end{cases}$

13) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=4\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1\end{cases}$

14) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=5\\ \frac{x}{5}-\frac{y}{3}=2\end{cases}$

15) $\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=6\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3\end{cases}$

4. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}0.2x+0.3y=1.2\\ 0.5x-0.2y=0.8\end{cases}$

2) $\begin{cases}0.3x+0.4y=2.1\\ 0.2x-0.5y=-0.1\end{cases}$

3) $\begin{cases}0.4x+0.5y=2.6\\ 0.3x-0.2y=0.7\end{cases}$

4) $\begin{cases}0.5x+0.2y=1.8\\ 0.3x-0.4y=0.2\end{cases}$

5) $\begin{cases}0.6x+0.3y=2.4\\ 0.2x-0.5y=-0.4\end{cases}$

6) $\begin{cases}0.7x+0.4y=3.1\\ 0.3x-0.2y=0.5\end{cases}$

7) $\begin{cases}0.8x+0.5y=3.8\\ 0.4x-0.3y=0.6\end{cases}$

8) $\begin{cases}0.9x+0.6y=4.5\\ 0.5x-0.4y=0.7\end{cases}$

9) $\begin{cases}0.2x+0.7y=2.3\\ 0.3x-0.5y=0.1\end{cases}$

10) $\begin{cases}0.3x+0.6y=2.7\\ 0.4x-0.2y=1.0\end{cases}$

11) $\begin{cases}0.4x+0.8y=3.6\\ 0.5x-0.3y=0.9\end{cases}$

12) $\begin{cases}0.5x+0.9y=4.5\\ 0.6x-0.4y=1.2\end{cases}$

13) $\begin{cases}0.6x+0.2y=2.2\\ 0.7x-0.5y=0.8\end{cases}$

14) $\begin{cases}0.7x+0.3y=2.8\\ 0.8x-0.6y=1.0\end{cases}$

15) $\begin{cases}0.8x+0.4y=3.4\\ 0.9x-0.7y=1.2\end{cases}$

5. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}\frac{x}{2}+0.3y=2.4\\ 0.4x-\frac{y}{3}=1.2\end{cases}$

2) $\begin{cases}0.2x+\frac{y}{4}=1.5\\ \frac{x}{3}-0.5y=0.8\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{x}{3}+0.4y=2.2\\ 0.5x-\frac{y}{2}=1.4\end{cases}$

4) $\begin{cases}0.3x+\frac{y}{5}=1.8\\ \frac{x}{4}-0.6y=0.9\end{cases}$

5) $\begin{cases}\frac{x}{4}+0.5y=2.6\\ 0.6x-\frac{y}{3}=1.5\end{cases}$

6) $\begin{cases}0.4x+\frac{y}{6}=2.1\\ \frac{x}{5}-0.7y=1.1\end{cases}$

7) $\begin{cases}\frac{x}{5}+0.6y=2.8\\ 0.7x-\frac{y}{4}=1.6\end{cases}$

8) $\begin{cases}0.5x+\frac{y}{7}=2.4\\ \frac{x}{6}-0.8y=1.2\end{cases}$

9) $\begin{cases}\frac{x}{6}+0.7y=3.0\\ 0.8x-\frac{y}{5}=1.8\end{cases}$

10) $\begin{cases}0.6x+\frac{y}{8}=2.7\\ \frac{x}{7}-0.9y=1.4\end{cases}$

11) $\begin{cases}\frac{x}{7}+0.8y=3.3\\ 0.9x-\frac{y}{6}=2.0\end{cases}$

12) $\begin{cases}0.7x+\frac{y}{9}=3.0\\ \frac{x}{8}-0.5y=1.5\end{cases}$

13) $\begin{cases}\frac{x}{8}+0.9y=3.6\\ 0.6x-\frac{y}{7}=1.7\end{cases}$

14) $\begin{cases}0.8x+\frac{y}{10}=3.3\\ \frac{x}{9}-0.4y=1.9\end{cases}$

15) $\begin{cases}\frac{x}{9}+0.5y=3.0\\ 0.7x-\frac{y}{8}=2.2\end{cases}$

6. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}2x+3y=7\\ x-y=1\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2\\ x+y=5\end{cases}$

3) $\begin{cases}0.3x+0.2y=1.2\\ 2x-y=4\end{cases}$

4) $\begin{cases}3(x-1)+2(y+2)=10\\ x+2y=5\end{cases}$

5) $\begin{cases}\frac{x}{3}+0.5y=2.5\\ 2x-\frac{y}{2}=4\end{cases}$

6) $\begin{cases}4(x+2)-3(y-1)=11\\ 0.2x+0.3y=1.1\end{cases}$

7) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=3\\ 0.5x-0.2y=1.6\end{cases}$

8) $\begin{cases}5x-2y=8\\ 3(x+1)+4(y-2)=5\end{cases}$

9) $\begin{cases}0.4x+0.3y=2.1\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1\end{cases}$

10) $\begin{cases}2(x-3)+5(y+1)=12\\ 0.6x-0.2y=2.0\end{cases}$

11) $\begin{cases}\frac{x}{5}+0.4y=2.4\\ 3x-2y=7\end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ 2(x+2) - 3(y-1) = 4 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 0.7x + 0.5y = 3.8 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 4(x-2) - 3(y+3) = 1 \\ 0.8x + 0.3y = 3.3 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{x}{6} + 0.2y = 1.8 \\ 5x - 3y = 11 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 3(x-1) + 4(y+2) = 18 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 0.9x + 0.4y = 4.1 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{5} = 0.5 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2(x+3) + 5(y-2) = 9 \\ 0.6x - 0.5y = 0.7 \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{x}{7} + 0.3y = 2.2 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 6x - 5y = 13 \\ 4(x+1) + 3(y-2) = 8 \end{cases}$

Метод сложения

Теория

В этой главе мы рассмотрим ещё один способ решения систем уравнений — метод сложения. Его идея в том, чтобы сложить или вычесть уравнения так, чтобы одна из переменных исчезла.

Основные приёмы:

- Если коэффициенты при одной переменной одинаковые — вычитаем уравнения.
- Если коэффициенты при одной переменной противоположные — складываем уравнения.
- Если коэффициенты не готовы — сначала умножаем уравнения на нужные числа.

Алгоритм метода сложения:

1. Уравниваем коэффициенты при одной переменной (если нужно).
2. Складываем или вычитаем уравнения, чтобы исключить эту переменную.
3. Решаем получившееся уравнение с одной переменной.
4. Находим вторую переменную подстановкой.
5. Записываем ответ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Коэффициенты готовы для сложения

Пусть нам нужно решить систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Заметим, что коэффициенты при y во втором уравнении -2, а в первом $+2$. Они противоположны, поэтому складываем уравнения:

$$(3x + 2y) + (x - 2y) = 8 + 0$$

$$3x + 2y + x - 2y = 8$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

Теперь подставим $x = 2$ в любое уравнение, например во второе:

$$2 - 2y = 0$$

$$2y = 2$$

$$y = 1$$

Ответ: $(x, y) = (2, 1)$.

Пример 2

Коэффициенты готовы для вычитания

Решим систему:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

Коэффициенты при x одинаковые (оба равны 5). Вычитаем из первого уравнения второе:

$$(5x + 3y) - (5x - 2y) = 19 - 4$$

$$5x + 3y - 5x + 2y = 15$$

$$5y = 15$$

$$y = 3$$

Подставляем $y = 3$ в первое уравнение:

$$5x + 3 \cdot 3 = 19$$

$$5x + 9 = 19$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

Ответ: $(2, 3)$.

Пример 3

Уравниваем коэффициенты умножением

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

Здесь коэффициенты не готовы. Уравняем коэффициенты при y. Для этого первое уравнение умножим на 2, а второе на 3:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 16 \\ 9x - 6y = -3 \end{cases}$$

Теперь коэффициенты при y противоположны ($+6$ и -6). Складываем уравнения:

$$(4x + 6y) + (9x - 6y) = 16 + (-3)$$

$$13x = 13$$

$$x = 1$$

Подставляем $x = 1$ в первое исходное уравнение:

$$2 \cdot 1 + 3y = 8$$

$$2 + 3y = 8$$

$$3y = 6$$

$$y = 2$$

Ответ: $(1, 2)$.

Пример 4

Уравниваем коэффициенты при другой переменной

Решим ту же систему, уравняв коэффициенты при x:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе на 2:

$$\begin{cases} 6x + 9y = 24 \\ 6x - 4y = -2 \end{cases}$$

Теперь коэффициенты при x одинаковые. Вычитаем из первого уравнения второе:

$$(6x + 9y) - (6x - 4y) = 24 - (-2)$$

$$6x + 9y - 6x + 4y = 26$$

$$13y = 26$$

$$y = 2$$

Подставляем $y = 2$ в первое исходное уравнение:

$$2x + 3 \cdot 2 = 8$$

$$2x + 6 = 8$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Получили тот же ответ. Можно уравнивать коэффициенты при любой переменной — как удобнее.

Пример 5

Когда уравнения нужно сначала упростить

Решим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 3 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

Сначала избавимся от дробей. Первое уравнение умножим на 6, второе на 6:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

Теперь уравняем коэффициенты при x. Умножим первое на 2, второе на 3:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 36 \\ 6x - 9y = 18 \end{cases}$$

Вычитаем из первого второе:

$$(6x + 4y) - (6x - 9y) = 36 - 18$$

$$6x + 4y - 6x + 9y = 18$$

$$13y = 18$$

$$y = \frac{18}{13}$$

Подставляем в первое упрощённое уравнение $3x + 2y = 18$:

$$3x + 2 \cdot \frac{18}{13} = 18$$

$$3x + \frac{36}{13} = 18$$

$$3x = 18 - \frac{36}{13} = \frac{234}{13} - \frac{36}{13} = \frac{198}{13}$$

$$x = \frac{198}{13} : 3 = \frac{198}{13} \cdot \frac{1}{3} = \frac{66}{13}$$

Ответ: $\left(\dfrac{66}{13}, \dfrac{18}{13}\right)$.

Задачи

1. Решите системы уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 7x + 6y = 15 \\ 7x - 6y = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 8x + 7y = 16 \\ 8x - 7y = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 6x + 5y = 14 \\ 6x - 5y = 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 9x + 8y = 17 \\ 9x - 8y = 5 \end{cases}$

2. Решите системы уравнений методом вычитания:

1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$

4) $\begin{cases}4x+3y=10\\4x+7y=18\end{cases}$

5) $\begin{cases}5x+4y=12\\5x+9y=22\end{cases}$

6) $\begin{cases}6x+5y=14\\6x+11y=25\end{cases}$

7) $\begin{cases}7x+6y=15\\7x+13y=28\end{cases}$

8) $\begin{cases}8x+7y=16\\8x+15y=31\end{cases}$

9) $\begin{cases}9x+8y=17\\9x+17y=34\end{cases}$

3. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}2x+3y=8\\3x+2y=7\end{cases}$

2) $\begin{cases}3x+4y=10\\4x+3y=11\end{cases}$

3) $\begin{cases}4x+5y=12\\5x+4y=13\end{cases}$

4) $\begin{cases}5x+6y=14\\6x+5y=15\end{cases}$

5) $\begin{cases}2x+5y=9\\3x+4y=10\end{cases}$

6) $\begin{cases}3x+5y=11\\4x+3y=12\end{cases}$

7) $\begin{cases}4x+7y=13\\5x+6y=14\end{cases}$

8) $\begin{cases}5x+8y=15\\6x+7y=16\end{cases}$

9) $\begin{cases}2x+7y=11\\3x+5y=10\end{cases}$

10) $\begin{cases}3x+8y=14\\5x+4y=12\end{cases}$

11) $\begin{cases}4x+9y=17\\6x+5y=13\end{cases}$

12) $\begin{cases}5x+7y=16\\7x+4y=15\end{cases}$

4. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}2(x+3)-3(y-1)=5\\3(x-2)+2(y+4)=12\end{cases}$

2) $\begin{cases}4(x-1)+5(y+2)=13\\3(x+3)-4(y-2)=7\end{cases}$

3) $\begin{cases}5(x+2)-2(y-3)=14\\2(x-4)+3(y+5)=9\end{cases}$

4) $\begin{cases}3(x-3)+4(y+1)=11\\5(x+4)-2(y-5)=18\end{cases}$

5) $\begin{cases}6(x+1)-3(y-2)=15\\4(x-5)+5(y+3)=10\end{cases}$

6) $\begin{cases}7(x-2)+2(y+6)=19\\3(x+5)-4(y-1)=8\end{cases}$

7) $\begin{cases}8(x+4)-5(y-3)=22\\6(x-3)+7(y+2)=16\end{cases}$

8) $\begin{cases}9(x-5)+6(y+4)=25\\5(x+6)-8(y-7)=14\end{cases}$

9) $\begin{cases}2(x+5)-3(y-4)=17\\4(x-6)+5(y+8)=21\end{cases}$

10) $\begin{cases}3(x-7)+4(y+9)=23\\6(x+8)-5(y-10)=19\end{cases}$

11) $\begin{cases}5(x+3)-7(y-2)=20\\8(x-4)+3(y+6)=13\end{cases}$

12) $\begin{cases}4(x+2)+6(y-5)=18\\7(x-3)-5(y+7)=12\end{cases}$

5. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3\\\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4\\\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=0\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=5\\\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=6\\\frac{x}{6}-\frac{y}{5}=2\end{cases}$

5) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=4\\\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1\end{cases}$

6) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=5\\\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=2\end{cases}$

7) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{7}=3\\\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1\end{cases}$

8) $\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=4\\\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=2\end{cases}$

9) $\begin{cases}\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=5\\\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=3\end{cases}$

10) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=4\\\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1\end{cases}$

11) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=5\\\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=0\end{cases}$

12) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=3\\\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=2\end{cases}$

13) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=4\\\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1\end{cases}$

14) $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=5\\\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=2\end{cases}$

15) $\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=6\\\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3\end{cases}$

16) $\begin{cases}\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=4\\\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=2\end{cases}$

17) $\begin{cases}\frac{x}{7}+\frac{y}{4}=3\\\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1\end{cases}$

18) $\begin{cases}\frac{x}{8}+\frac{y}{3}=4\\\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=2\end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{5} = 5 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{7} = 3 \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{6} = 6 \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{8} = 4 \end{cases}$

6. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 0.8 \\ 0.3x - 0.2y = 0.7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0.5x - 0.2y = 1.4 \\ 3x + 4y = 22 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0.04x + 0.05y = 0.23 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0.7x - 0.4y = 1.8 \\ 2x + 9y = 31 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0.08x + 0.02y = 0.24 \\ 5x - 6y = -2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 0.3x + 0.07y = 0.25 \\ 9x - 4y = 13 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 0.06x + 0.4y = 2.8 \\ 2x - 5y = -6 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 0.9x - 0.03y = 2.4 \\ 4x + 8y = 32 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 0.5x + 0.07y = 3.1 \\ 6x - 2y = 16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 0.02x - 0.09y = -0.13 \\ 8x + 5y = 34 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 0.7x + 0.3y = 2.9 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 0.03x - 0.08y = -0.11 \\ 9x + 2y = 33 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 0.06x + 0.05y = 0.30 \\ 7x - 3y = 19 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 0.4x - 0.07y = 0.9 \\ 8x + 6y = 40 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 0.05x + 0.09y = 0.41 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 0.25x + 0.3y = 2.1 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 0.4x - 0.15y = 0.8 \\ 7x + 3y = 25 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 0.12x + 0.25y = 1.13 \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 0.8x - 0.35y = 1.3 \\ 6x + 4y = 28 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 0.15x + 0.2y = 1.05 \\ 3x - 7y = -5 \end{cases}$

7. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 0.1x + \dfrac{1}{2}y = 2 \\ \dfrac{1}{3}x - 0.2y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + 0.4y = 4 \\ 0.5x - \dfrac{1}{4}y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0.25x + \dfrac{3}{4}y = 5 \\ \dfrac{1}{5}x - 0.3y = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3}{5}x + 0.2y = 3 \\ 0.4x - \dfrac{1}{3}y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0.75x + \dfrac{1}{2}y = 5 \\ \dfrac{2}{5}x - 0.25y = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{1}{4}x + 0.6y = 4 \\ 0.3x - \dfrac{2}{3}y = 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 0.8x + \dfrac{1}{5}y = 5 \\ \dfrac{3}{4}x - 0.1y = 4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x + 0.75y = 6 \\ 0.6x - \dfrac{1}{2}y = 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 0.15x + \dfrac{4}{5}y = 5 \\ \dfrac{2}{3}x - 0.3y = 3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{5}{6}x + 0.25y = 4 \\ 0.2x - \dfrac{3}{4}y = 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 0.4x + \dfrac{3}{5}y = 5 \\ \dfrac{1}{2}x - 0.6y = 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{3}{8}x + 0.5y = 3 \\ 0.75x - \dfrac{1}{3}y = 4 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 0.6x + \dfrac{2}{3}y = 6 \\ \dfrac{1}{4}x - 0.2y = 1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \dfrac{4}{5}x + 0.3y = 5 \\ 0.5x - \dfrac{3}{5}y = 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 0.2x + \dfrac{5}{6}y = 4 \\ \dfrac{2}{3}x - 0.4y = 3 \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{3}{10}x + 0.7y = 5 \\ 0.8x - \dfrac{1}{5}y = 4 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 0.45x + \dfrac{2}{5}y = 4 \\ \dfrac{5}{6}x - 0.3y = 5 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{7}{8}x + 0.2y = 5 \\ 0.3x - \dfrac{4}{5}y = 1 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 0.9x + \dfrac{1}{3}y = 6 \\ \dfrac{3}{5}x - 0.5y = 2 \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dfrac{2}{7}x + 0.6y = 4 \\ 0.4x - \dfrac{5}{6}y = 1 \end{cases}$

8. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2(x-1)+\frac{1}{2}y=5 \\ \frac{1}{3}x-3(y+2)=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3(x+2)-0.4y=8 \\ 0.5x+\frac{2}{3}(y-1)=4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3}{4}(x-3)+2(y+1)=7 \\ 5x-0.2y=9 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0.6x+\frac{1}{4}(y-2)=3 \\ 4(x+1)-\frac{2}{3}y=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{2}{5}(x+3)-3y=2 \\ 0.8x+\frac{1}{2}(y+4)=6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4(x-2)+0.3y=7 \\ \frac{5}{6}x-2(y+1)=3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+4)-5y=1 \\ 3x+\frac{3}{4}(y-2)=8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 0.7x+2(y-3)=5 \\ \frac{4}{5}(x+2)-3y=4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 5(x-1)-\frac{1}{3}y=6 \\ 0.2x+\frac{3}{5}(y+4)=3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{7}(x+5)+4y=8 \\ 2x-0.6y=5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 0.4x-3(y-2)=4 \\ \frac{5}{8}(x+1)+2y=6 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 6(x+3)+\frac{2}{5}y=9 \\ \frac{1}{4}x-4(y-1)=2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \frac{7}{9}(x-4)-2y=3 \\ 0.5x+3(y+2)=7 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 0.3x+\frac{5}{6}(y-5)=4 \\ 4(x+2)-0.8y=6 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \frac{2}{3}(x-1)+5y=8 \\ 0.6x-\frac{3}{4}(y+3)=2 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3(x+4)-0.5y=7 \\ \frac{5}{7}(x-2)+4y=5 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 0.8x+\frac{4}{5}(y-1)=5 \\ 2(x+3)-\frac{1}{6}y=4 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \frac{1}{5}(x-3)+6y=4 \\ 0.7x-2(y+5)=3 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 4x-\frac{3}{5}(y+2)=6 \\ \frac{5}{9}(x-1)+0.4y=3 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 0.2x+\frac{7}{8}(y-4)=3 \\ 3(x+5)-0.9y=8 \end{cases}$

Решение текстовых задач

Теория

Текстовые задачи — это задачи, в которых условие описано словами, а не формулами. Чтобы решить такую задачу, нужно перевести её условие на язык математики, то есть составить систему уравнений.

Алгоритм решения текстовой задачи:

1. Внимательно читаем условие и определяем, какие величины неизвестны.
2. Обозначаем неизвестные переменными (обычно x и y).
3. По условию задачи составляем уравнения, связывающие эти переменные.
4. Решаем полученную систему уравнений.
5. Записываем ответ, отвечая на вопрос задачи.

Рассмотрим основные типы задач, которые решаются с помощью систем линейных уравнений.

Пример 1

Задача на движение (навстречу)

Из двух городов, расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Они встретились через 2 часа. Найдите скорость каждого автомобиля, если скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго.

Пусть x км/ч — скорость первого автомобиля, y км/ч — скорость второго.

Так как они двигались навстречу друг другу, скорость сближения равна $x + y$. За 2 часа они проехали вместе 300 км, значит:

$$2(x + y) = 300$$

Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго:

$$x = y + 10$$

Получили систему:

$$\begin{cases} 2(x + y) = 300 \\ x = y + 10 \end{cases}$$

Упростим первое уравнение: $x + y = 150$.

Подставляем $x = y + 10$:

$$(y + 10) + y = 150$$
$$2y + 10 = 150$$
$$2y = 140$$
$$y = 70$$

Тогда $x = 70 + 10 = 80$.

Ответ: скорость первого автомобиля 80 км/ч, второго — 70 км/ч.

Пример 2

Задача на движение (в одном направлении)

Из пункта А в пункт В выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Через 2 часа из пункта А вслед за ним выехал второй автомобиль со скоростью 80 км/ч. Через сколько часов после своего выезда второй автомобиль догонит первый?

Пусть t часов — время движения второго автомобиля до встречи. Тогда первый автомобиль к моменту встречи ехал $t + 2$ часа.

Расстояние, которое проехал первый: $60(t + 2)$ км. Расстояние, которое проехал второй: $80t$ км.

Эти расстояния равны, так как они встретились:

$$60(t+2) = 80t$$

$$60t + 120 = 80t$$

$$120 = 20t$$

$$t = 6$$

Ответ: второй автомобиль догонит первый через 6 часов после своего выезда.

Пример 3

Задача на движение по реке

Катер прошёл расстояние между двумя пристанями по течению за 3 часа, а против течения — за 4 часа. Скорость течения реки 2 км/ч. Найдите собственную скорость катера и расстояние между пристанями.

Пусть x км/ч — собственная скорость катера, y км — расстояние между пристанями.

По течению скорость $x + 2$, время 3 часа:

$$3(x+2) = y$$

Против течения скорость $x - 2$, время 4 часа:

$$4(x-2) = y$$

Получили систему:

$$\begin{cases} 3(x+2) = y \\ 4(x-2) = y \end{cases}$$

Приравниваем правые части:

$$3(x+2) = 4(x-2)$$

$$3x + 6 = 4x - 8$$

$$6 + 8 = 4x - 3x$$

$$14 = x$$

Тогда $y = 3(14+2) = 3 \cdot 16 = 48$.

Ответ: собственная скорость катера 14 км/ч, расстояние 48 км.

Пример 4

Задача на работу

Два токаря вместе изготовили 350 деталей. Первый работал 5 дней, второй — 4 дня. Сколько деталей в день изготавливал каждый токарь, если первый делал на 10 деталей в день больше второго?

Пусть x деталей в день — производительность первого, y деталей в день — производительность второго.

Первый за 5 дней сделал $5x$ деталей, второй за 4 дня — $4y$ деталей. Всего 350:

$$5x + 4y = 350$$

Первый делал на 10 деталей в день больше:

$$x = y + 10$$

Подставляем $x = y + 10$ в первое уравнение:

$$5(y+10) + 4y = 350$$

$$5y + 50 + 4y = 350$$

$$9y + 50 = 350$$

$$9y = 300$$

$$y = \frac{300}{9} = \frac{100}{3}$$

Дробный ответ? В 7 классе это нормально, можно оставить в виде дроби.

Тогда $x = \frac{100}{3} + 10 = \frac{100}{3} + \frac{30}{3} = \frac{130}{3}$.

Ответ: первый токарь изготавливал $\frac{130}{3}$ детали в день, второй — $\frac{100}{3}$ детали в день.

Пример 5

Задача на проценты

В двух бидонах вместе 40 литров молока. После того как из первого бидона отлили 20% молока, а из второго — 30%, в обоих бидонах осталось 30 литров. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

Пусть x л — было в первом бидоне, y л — во втором.

Всего 40 литров:

$$x + y = 40$$

Из первого отлили 20%, значит осталось $0.8x$ л. Из второго отлили 30%, значит осталось $0.7y$ л. Осталось 30 литров:

$$0.8x + 0.7y = 30$$

Получили систему:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 0.8x + 0.7y = 30 \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 10, чтобы избавиться от дробей:

$$8x + 7y = 300$$

Из первого уравнения $y = 40 - x$. Подставляем:

$$8x + 7(40 - x) = 300$$

$$8x + 280 - 7x = 300$$

$$x + 280 = 300$$

$$x = 20$$

Тогда $y = 40 - 20 = 20$.

Ответ: в каждом бидоне было по 20 литров.

Пример 6

Задача на возраст

Сумма возрастов отца и сына равна 50 годам. Через 5 лет отец будет в 3 раза старше сына. Сколько лет отцу и сыну сейчас?

Пусть x лет — возраст отца, y лет — возраст сына сейчас.

Сумма возрастов сейчас:

$$x + y = 50$$

Через 5 лет отцу будет $x + 5$, сыну $y + 5$. Отец будет в 3 раза старше:

$$x + 5 = 3(y + 5)$$

Раскрываем скобки:

$$x + 5 = 3y + 15$$

$$x = 3y + 10$$

Подставляем в первое уравнение:

$$(3y + 10) + y = 50$$

$$4y + 10 = 50$$

$$4y = 40$$

$$y = 10$$

Тогда $x = 3 \cdot 10 + 10 = 40$.

Ответ: отцу 40 лет, сыну 10 лет.

Пример 7

Задача на части

Для приготовления компота взяли яблоки и груши. Яблок взяли в 3 раза больше, чем груш. Сколько взяли яблок и сколько груш, если всего фруктов было 12 кг?

Пусть x кг — масса груш, тогда $3x$ кг — масса яблок.

Всего:

$$x + 3x = 12$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

Значит, груш 3 кг, яблок $3 \cdot 3 = 9$ кг.

Ответ: яблок 9 кг, груш 3 кг.

Задачи на движение

1) Из двух городов, расстояние между которыми 240 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 2 часа. Найдите скорость каждого автомобиля, если скорость первого на 20 км/ч больше скорости второго.

2) Из двух городов, расстояние между которыми 320 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 2 часа. Найдите скорость каждого автомобиля, если скорость первого на 30 км/ч больше скорости второго.

3) Из двух городов, расстояние между которыми 400 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 2,5 часа. Найдите скорость каждого автомобиля, если скорость первого на 20 км/ч больше скорости второго.

4) Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 3 часа. Скорость первого на 15 км/ч больше скорости второго. Найдите скорость каждого, если расстояние между городами 345 км.

5) Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 4 часа. Скорость первого на 20 км/ч больше скорости второго. Найдите скорость каждого, если расстояние между городами 560 км.

6) Расстояние между двумя станциями 120 км. Поезд прошёл это расстояние за 2 часа. Найдите скорость поезда, если известно, что первую половину пути он шёл со скоростью на 10 км/ч большей, чем вторую. (Здесь нужно ввести две скорости: x и y, и составить систему: первая половина пути 60 км, вторая 60 км.)

7) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Автомобилист прибыл в B на 3 часа раньше велосипедиста. Найдите их скорости, если скорость автомобилиста на 40 км/ч больше скорости велосипедиста.

8) Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 30 км, и встретились через 3 часа. Найдите скорость каждого, если один шёл на 2 км/ч быстрее другого.

9) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист со скоростью 15 км/ч. Через 2 часа из пункта A вслед за ним выехал мотоциклист со скоростью 40 км/ч. Через сколько часов после своего выезда мотоциклист догонит велосипедиста?

10) Из пункта A в пункт B выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Через 3 часа из пункта A вслед за ним выехал второй автомобиль со скоростью 80 км/ч. Через сколько часов после своего выезда второй автомобиль догонит первый?

11) Расстояние между городами 300 км. Из одного города в другой выехал автомобиль со скоростью 70 км/ч. Через час из другого города навстречу ему выехал второй автомобиль со скоростью 80 км/ч. Через сколько часов после выезда первого автомобиля они встретятся?

12) Расстояние между городами 400 км. Из одного города в другой выехал автомобиль со скоростью 80 км/ч. Через 2 часа из другого города навстречу ему выехал второй автомобиль со скоростью 90 км/ч. Через сколько часов после выезда первого автомобиля они встретятся?

13) Из двух городов навстречу друг другу выехали два автомобиля. Первый выехал на 2 часа раньше второго и проехал до встречи 240 км. Второй проехал до встречи 180 км. Найдите скорость каждого автомобиля.

Задачи на движение по реке

1) Катер прошёл расстояние между двумя пристанями по течению за 3 часа, а против течения — за 4 часа. Скорость течения реки 2 км/ч. Найдите собственную скорость катера и расстояние между пристанями.

2) Теплоход проплыл от пристани A до пристани B по течению реки за 4 часа, а обратно против течения — за 5 часов. Скорость течения реки 3 км/ч. Найдите собственную скорость теплохода и расстояние между пристанями.

3) Моторная лодка прошла путь от деревни до города по течению реки за 2 часа, а обратный путь против течения занял 3 часа. Найдите собственную скорость лодки и расстояние между деревней и городом, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

4) Лодка проплыла 24 км по течению реки и 24 км против течения, затратив на весь путь 5 часов. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

5) Катер прошёл 30 км по течению реки и 20 км против течения за 2 часа 30 минут. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найдите собственную скорость катера.

6) Расстояние между двумя причалами по реке равно 60 км. Этот путь катер проходит туда и обратно за 5 часов. Скорость течения реки равна 5 км/ч. Найдите собственную скорость катера.

7) Расстояние между двумя пристанями 40 км. Лодка проходит это расстояние по течению на 1 час быстрее, чем против течения. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения, если известно, что собственная скорость лодки на 8 км/ч больше скорости течения.

8) Катер проплыл 48 км по течению за время, которое на 1 час меньше, чем время, затраченное на 48 км против течения. Найдите собственную скорость катера и скорость течения, если известно, что скорость течения равна 2 км/ч.

9) Моторная лодка прошла 36 км по течению и 36 км против течения, причём на путь по течению она затратила на 1 час меньше, чем на путь против течения. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения равна 3 км/ч.

10) Лодка шла 3 часа по течению реки и 2 часа по озеру, пройдя за всё это время 67 км. Собственная скорость лодки на 3 км/ч больше скорости течения. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения.

11) Катер прошёл 4 часа по озеру и 3 часа против течения реки, пройдя за это время 98 км. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость катера.

12) Туристы плыли 2 часа на лодке по озеру и 3 часа по реке против течения, пройдя за это время 29 км. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

13) За 3 часа по течению реки катер проходит на 16 км больше, чем за 2 часа против течения. За 5 часов против течения он проходит на 10 км больше, чем за 3 часа по течению. Найдите собственную скорость катера и скорость течения.

14) За 4 часа по течению реки лодка проходит расстояние, на 10 км большее, чем за 3 часа против течения. За 5 часов по течению лодка проходит на 60 км больше, чем за 2 часа против течения. Найдите скорость лодки и скорость течения.

15) За 2 часа по течению реки катер проходит на 10 км меньше, чем за 3 часа против течения. За 4 часа по течению катер проходит на 36 км больше, чем за 2 часа против течения. Найдите скорость катера и скорость течения.

16) Из пункта А вниз по течению отправился плот. Одновременно из пункта Б навстречу ему отправилась моторная лодка. Через 2 часа они встретились. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения, если расстояние между А и Б равно 30 км, а собственная скорость лодки в 4 раза больше скорости течения.

17) От пристани А отчалил катер и поплыл по течению к пристани Б. Одновременно от пристани Б отчалил плот и поплыл навстречу катеру. Через 3 часа они встретились. Найдите собственную скорость катера и скорость течения, если расстояние между пристанями 60 км, а скорость катера в 5 раз больше скорости течения.

18) Из двух портов, расстояние между которыми 80 км, одновременно навстречу друг другу отправились катер (по течению) и плот (против течения). Они встретились через 2 часа. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения равна 4 км/ч, а скорость катера в 3 раза больше скорости течения.

19) Если катер плывёт по течению, то его скорость равна 20 км/ч, а если против течения — 14 км/ч. Найдите собственную скорость катера и скорость течения.

20) На путь по течению реки катер затратил 3 часа, а на обратный путь — 5 часов. Скорость течения реки 3 км/ч. Найдите скорость катера в стоячей воде и расстояние между пристанями.

Задачи на работу

1) Два токаря вместе изготовили 380 деталей. Первый работал 6 дней, второй — 5 дней. Сколько деталей в день изготавливал каждый, если первый делал на 8 деталей в день больше второго?

2) Два токаря вместе изготовили 420 деталей. Первый работал 7 дней, второй — 6 дней. Сколько деталей в день изготавливал каждый, если первый делал на 5 деталей в день больше второго?

3) Два токаря вместе изготовили 500 деталей. Первый работал 8 дней, второй — 7 дней. Сколько деталей в день изготавливал каждый, если первый делал на 10 деталей в день больше второго?

4) Один токарь изготавливает в день на 8 деталей больше другого. Первый работал 5 дней, второй — 7 дней. Сколько деталей в день изготавливает каждый, если вместе они изготовили 416 деталей?

5) Два автомата упаковывают товар. Первый работал 4 часа, второй — 6 часов, и вместе они упаковали 840 единиц товара. Найдите производительность каждого автомата, если известно, что первый упаковывает в час на 20 единиц больше второго.

6) В цехе работают два станка. Первый работал 3 часа, второй — 5 часов, и вместе они произвели 215 деталей. Найдите производительность каждого станка, если за 1 час первый станок производит на 5 деталей меньше, чем второй.

7) Для выполнения заказа бригада рабочих должна была изготавливать 20 деталей в час. Бригада увеличила производительность на 5 деталей в час и выполнила заказ на 2 часа быстрее. Сколько деталей составлял заказ? (Здесь достаточно одной переменной, задача на линейное уравнение, можно оставить как простую.)

8) Два рабочих изготовили вместе 320 деталей. Первый работал 6 дней, второй — 5 дней. Сколько деталей в день изготавливал каждый, если второй изготавливал в день на 4 детали меньше первого?

Задачи на проценты

1) В двух бидонах вместе 40 литров молока. После того как из первого бидона отлили 20% молока, а из второго — 30%, в обоих бидонах осталось 30 литров. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

2) В двух бидонах вместе 50 литров молока. После того как из первого бидона отлили 10% молока, а из второго — 20%, в обоих бидонах осталось 42 литра. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

3) В двух бидонах вместе 60 литров молока. После того как из первого бидона отлили 25% молока, а из второго — 40%, в обоих бидонах осталось 39 литров. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

4) Смешали 3 кг 20%-го раствора соли и 2 кг 30%-го раствора соли. Найдите концентрацию получившегося раствора. (Здесь неизвестна только концентрация, уравнение одно.)

5) Смешали 4 кг 15%-го раствора кислоты и 6 кг 25%-го раствора кислоты. Найдите концентрацию получивше-

гося раствора.

6) Имеется два сплава. Первый содержит 10% меди, второй — 25% меди. Масса второго сплава на 3 кг больше массы первого. Из этих двух сплавов получили третий, содержащий 18% меди. Найдите массу каждого сплава.

7) Имеется два сплава. Первый содержит 15% меди, второй — 30% меди. Масса второго сплава на 4 кг больше массы первого. Из этих двух сплавов получили третий, содержащий 20% меди. Найдите массу каждого сплава.

8) Имеется два сплава. Первый содержит 20% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава на 5 кг больше массы первого. Из этих двух сплавов получили третий, содержащий 30% меди. Найдите массу каждого сплава.

9) Кусок сплава меди и цинка массой 20 кг содержит 30% меди. Сколько килограммов меди нужно добавить к этому куску, чтобы новый сплав содержал 40% меди? (Здесь одно уравнение с одним неизвестным.)

Задачи на возраст и части

1) Сумма возрастов матери и дочери равна 45 годам. Через 5 лет мать будет в 4 раза старше дочери. Сколько лет матери и дочери сейчас?

2) Сумма возрастов отца и сына равна 50 годам. Через 10 лет отец будет в 2 раза старше сына. Сколько лет отцу и сыну сейчас?

3) Сумма возрастов бабушки и внучки равна 80 годам. Через 5 лет бабушка будет в 5 раз старше внучки. Сколько лет бабушке и внучке сейчас?

4) Отцу 40 лет, сыну 10 лет. Через сколько лет отец будет в 2 раза старше сына?

5) Матери 35 лет, дочери 7 лет. Через сколько лет мать будет в 3 раза старше дочери?

6) Бабушке 60 лет, внуку 10 лет. Через сколько лет бабушка будет в 4 раза старше внука?

7) Для приготовления компота взяли яблоки и груши. Яблок взяли в 3 раза больше, чем груш. Сколько взяли яблок и сколько груш, если всего фруктов было 12 кг?

8) Для приготовления салата взяли помидоры и огурцы. Помидоров взяли в 2 раза больше, чем огурцов. Сколько взяли помидоров и сколько огурцов, если всего овощей было 9 кг?

9) Для приготовления варенья взяли вишню и сахар. Вишни взяли в 4 раза больше, чем сахара. Сколько взяли вишни и сколько сахара, если общая масса продуктов 15 кг?

10) Число учащихся в двух классах относится как 2:3. Сколько учащихся в каждом классе, если всего 50 учащихся?

11) Число учащихся в двух классах относится как 3:4. Сколько учащихся в каждом классе, если всего 63 учащихся?

12) Число учащихся в двух классах относится как 5:6. Сколько учащихся в каждом классе, если всего 88 учащихся?

13) Периметр прямоугольника равен 40 см, а его длина в 3 раза больше ширины. Найдите стороны прямоугольника.

14) Периметр прямоугольника равен 48 см, а его длина на 6 см больше ширины. Найдите стороны прямоугольника.

15) Периметр прямоугольника равен 60 см, а его ширина в 2 раза меньше длины. Найдите стороны прямоугольника.

Графический метод

Теория

В этой главе мы рассмотрим графический метод решения систем линейных уравнений. Он основан на том, что каждое линейное уравнение с двумя переменными задаёт прямую на координатной плоскости. Решение системы — это точка пересечения этих прямых.

Как построить график линейного уравнения: Уравнение $ax+by = c$ можно привести к виду $y = kx+m$ (если $b \neq 0$), выразив y:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Для построения прямой достаточно найти две точки.

Возможные случаи:

- Прямые пересекаются в одной точке — система имеет единственное решение.
- Прямые параллельны — система не имеет решений.
- Прямые совпадают — система имеет бесконечно много решений.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Единственное решение

Решим графически систему:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Построение первого уравнения: Выразим y: $y = 5 - x$. Найдём две точки:

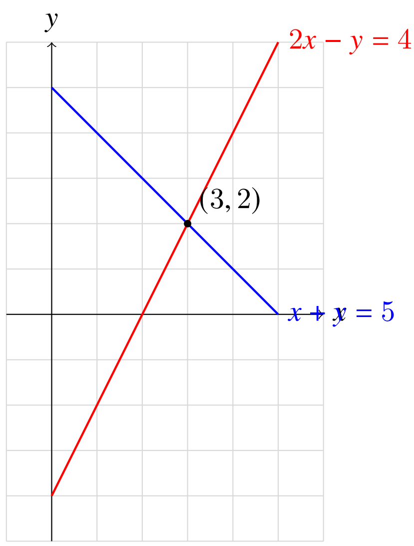
- при $x = 0$: $y = 5$, точка $A(0, 5)$;
- при $x = 5$: $y = 0$, точка $B(5, 0)$.

Проводим прямую через точки A и B.

Построение второго уравнения: $2x - y = 4 \Rightarrow y = 2x - 4$. Найдём две точки:

- при $x = 0$: $y = -4$, точка $C(0, -4)$;
- при $x = 2$: $y = 0$, точка $D(2, 0)$.

Проводим прямую через точки C и D.



Прямые пересекаются в точке $(3, 2)$.

Проверим подстановкой: $3 + 2 = 5$, $2 \cdot 3 - 2 = 6 - 2 = 4$. Всё верно.

Ответ: $(3, 2)$.

Пример 2

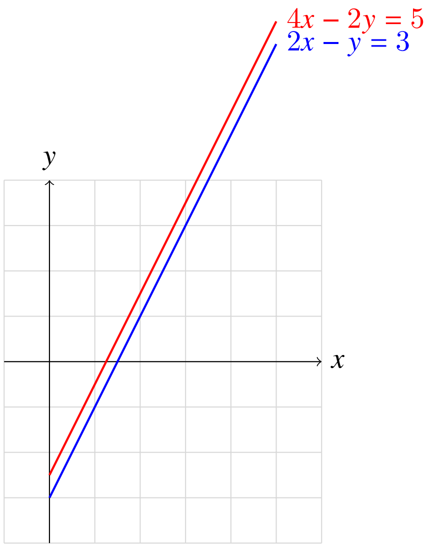
Система не имеет решений

Решим графически систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$

Первое уравнение: $y = 2x - 3$. Точки: при $x = 0$: $y = -3$; при $x = 2$: $y = 1$.

Второе уравнение: $4x - 2y = 5 \Rightarrow -2y = 5 - 4x \Rightarrow y = 2x - 2.5$. Точки: при $x = 0$: $y = -2.5$; при $x = 2$: $y = 1.5$.



Оба уравнения задают прямые с одинаковым угловым коэффициентом $k = 2$, но разными свободными членами. Прямые параллельны и не пересекаются.

Ответ: система не имеет решений.

Пример 3

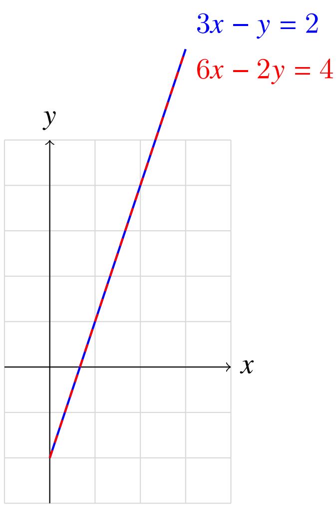
Система имеет бесконечно много решений

Решим графически систему:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

Первое уравнение: $y = 3x - 2$. Точки: при $x = 0$: $y = -2$; при $x = 1$: $y = 1$.

Второе уравнение: $6x - 2y = 4 \Rightarrow -2y = 4 - 6x \Rightarrow y = 3x - 2$.



Оба уравнения задают одну и ту же прямую (на графике они совпадают). Значит, любая точка этой прямой является решением.

Ответ: система имеет бесконечно много решений, все точки прямой $y = 3x - 2$.

Пример 4

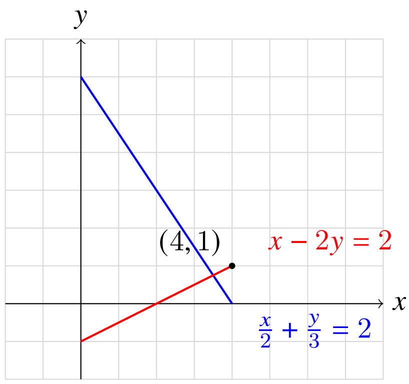
Дробные коэффициенты

Решим графически систему:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Первое уравнение: умножим на 6: $3x + 2y = 12 \Rightarrow y = \frac{12 - 3x}{2} = 6 - 1.5x$. Точки: при $x = 0$: $y = 6$; при $x = 4$: $y = 0$.

Второе уравнение: $x - 2y = 2 \Rightarrow -2y = 2 - x \Rightarrow y = \frac{x - 2}{2} = 0.5x - 1$. Точки: при $x = 0$: $y = -1$; при $x = 4$: $y = 1$.



Прямые пересекаются в точке $(4, 1)$. Проверим: $\frac{4}{2} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} \neq 2$ — не сходится! Значит, точка пересечения не $(4, 1)$.

Найдём точку пересечения аналитически. Выразим x из второго: $x = 2y + 2$. Подставим в первое уравнение в упрощённом виде $3x + 2y = 12$:

$$3(2y + 2) + 2y = 12$$
$$6y + 6 + 2y = 12$$
$$8y = 6$$
$$y = 0.75$$

Тогда $x = 2 \cdot 0.75 + 2 = 1.5 + 2 = 3.5$.

Точка пересечения $(3.5; 0.75)$. На графике её нужно строить точнее.

Пример 5

Графический метод как способ определения количества решений

Иногда не нужно находить точное решение, достаточно определить, сколько решений имеет система. Для этого смотрим на коэффициенты:

Система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

- Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то прямые пересекаются — одно решение.
- Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то прямые параллельны — нет решений.
- Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то прямые совпадают — бесконечно много решений.

Например, для системы $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$ имеем: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ — прямые совпадают, бесконечно много решений.

Для системы $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=7 \end{cases}$: $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, но $\frac{5}{7}\neq\frac{1}{2}$ — прямые параллельны, решений нет.

Задачи

1. Постройте графики уравнений и найдите точку пересечения:

1) $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-2y=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x-y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4x-y=2 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-3y=-5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x+5y=8 \\ 4x-y=6 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 7x+2y=10 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 8x-5y=4 \\ 4x+3y=7 \end{cases}$

2. Определите, сколько решений имеет система (не решая её полностью):

1) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=10 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 6x-4y=7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x-y=2 \\ 10x-2y=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x+3y=7 \\ 8x+6y=14 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x-5y=3 \\ 4x-10y=5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x+2y=8 \\ 3x+y=4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 14x-6y=11 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 9x+6y=12 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 8x-4y=12 \\ 4x-2y=5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 5x+10y=15 \\ x+2y=3 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 12x-8y=20 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

3. Постройте графики и определите, пересекаются ли прямые. Если да, найдите координаты точки пересечения:

1) $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-x+5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=3x-4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=-2x+3 \\ y=0.5x-2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y=4x-3 \\ y=2x+1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y=-3x+5 \\ y=-3x-1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y=0.5x+2 \\ y=-2x+7 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y=\frac{2}{3}x+1 \\ y=-\frac{1}{3}x+4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y=1.5x-2 \\ y=-0.5x+3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+2 \\ y=\frac{1}{4}x-1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y=2.2x+1 \\ y=2.2x-3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} y=\frac{5}{3}x-2 \\ y=-\frac{4}{3}x+5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} y=0.8x+3 \\ y=1.2x-1 \end{cases}$

4. Составьте систему уравнений по описанию и определите её решение:

1) Прямые пересекаются в точке $(2,3)$

2) Прямые параллельны

3) Прямые совпадают

4) Прямые пересекаются в точке $(-1,4)$

5) Прямые пересекаются в точке $(0,2)$

6) Прямые параллельны и различны

7) Прямые пересекаются в точке $(3, -1)$

8) Прямые совпадают и проходят через $(1, 1)$

9) Прямые пересекаются в точке $(-2, 0)$

10) Прямые параллельны и не совпадают

11) Прямые пересекаются в точке $(4, 2)$

12) Прямые совпадают и задаются уравнением $y = 2x - 3$

5. Не строя графики, определите, пересекаются ли прямые. Если да, найдите точку пересечения аналитически, а затем проверьте графически:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 10x + 4y = 15 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x + 5y = 9 \\ 8x + 10y = 18 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 6x + 8y = 21 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - 7y = 5 \\ 4x - 14y = 10 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 10x - 6y = 13 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 9x + 6y = 15 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 8x - 2y = 12 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 7x + 5y = 11 \\ 14x + 10y = 23 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 6x - 9y = 12 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

Системы с параболой

Теория

В этой главе мы рассмотрим системы уравнений, в которых одно уравнение — линейное (прямая), а другое — квадратное (парабола). Такие системы решаются методом подстановки: из линейного уравнения выражаем одну переменную и подставляем в квадратное.

Общий вид системы:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases}$$

Метод решения:

1. Приравниваем правые части (так как левые равны y):

$$ax^2 + bx + c = kx + m$$

2. Переносим всё в левую часть:

$$ax^2 + (b-k)x + (c-m) = 0$$

3. Решаем полученное квадратное уравнение.
4. Для каждого найденного x находим y из линейного уравнения.
5. Записываем ответ в виде пар (x, y).

Сколько решений может быть? Квадратное уравнение может иметь:

- два различных корня — система имеет два решения;
- один корень (дискриминант равен нулю) — система имеет одно решение (прямая касается параболы);
- нет корней — система не имеет решений (прямая и парабола не пересекаются).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Два решения

Решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Приравниваем правые части:

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1$$
$$x^2 - 3x - x + 2 + 1 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$D = 16 - 12 = 4$$
$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Находим y из линейного уравнения $y = x - 1$:

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 - 1 = 0$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3 - 1 = 2$$

Ответ: $(1, 0)$ и $(3, 2)$.

Пример 2

Одно решение (касание)

Решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Приравниваем:

$$x^2 - 4x + 4 = 2x - 5$$
$$x^2 - 4x - 2x + 4 + 5 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x - 3)^2 = 0$$
$$x = 3$$

Находим y:

$$y = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$$

Ответ: $(3, 1)$ — единственное решение, прямая касается параболы в этой точке.

Пример 3

Нет решений

Решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Приравниваем:

$$x^2 + 1 = x - 2$$
$$x^2 - x + 3 = 0$$
$$D = 1 - 12 = -11 < 0$$

Дискриминант отрицательный, значит, действительных корней нет.
Ответ: система не имеет решений (прямая и парабола не пересекаются).

Пример 4

Когда парабола задана неявно

Решим систему:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Выразим y из второго уравнения:

$$-y = 3 - 2x \Rightarrow y = 2x - 3$$

Подставляем в первое:

$$2x - 3 = 2x^2 - 3x + 1$$
$$0 = 2x^2 - 3x + 1 - 2x + 3$$
$$0 = 2x^2 - 5x + 4$$
$$2x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$D = 25 - 32 = -7 < 0$$

Решений нет.
Ответ: система не имеет решений.

Пример 5

Дробные корни

Решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 1 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

Приравниваем:

$$x^2 - 2x - 1 = 3x + 1$$
$$x^2 - 2x - 3x - 1 - 1 = 0$$
$$x^2 - 5x - 2 = 0$$
$$D = 25 + 8 = 33$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Находим y:

$$y_{1,2} = 3 \cdot \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2} + 1 = \frac{15 \pm 3\sqrt{33}}{2} + 1 = \frac{15 \pm 3\sqrt{33} + 2}{2} = \frac{17 \pm 3\sqrt{33}}{2}$$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{33}}{2}, \frac{17+3\sqrt{33}}{2}\right)$ и $\left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}, \frac{17-3\sqrt{33}}{2}\right)$.

Задачи

1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = 2x^2 - x + 1 \\ y = x + 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y = 3x^2 - 2x - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y = x^2 + 3x - 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y = 2x^2 - 3x - 2 \\ y = x - 4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ y = 3x - 7 \end{cases}$

12) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

2. Определите, сколько решений имеет система (не решая полностью):

1) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 9 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x + 3 \\ y = 4x - 5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y = 3x^2 - 5x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y = x^2 + 4x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y = x^2 - 8x + 16 \\ y = 4x - 8 \end{cases}$

3. Найдите точки пересечения параболы и прямой:

1) $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = x + 1$

2) $y = x^2 + x - 2$ и $y = 2x - 1$

3) $y = 2x^2 - 3x + 1$ и $y = x + 2$

4) $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = 2x - 5$

5) $y = x^2 - 6x + 8$ и $y = x - 2$

6) $y = x^2 + 2x - 3$ и $y = -x + 1$

7) $y = 3x^2 - 2x - 1$ и $y = 2x - 2$

8) $y = x^2 - 5x + 4$ и $y = 3x - 7$

9) $y = x^2 - 3x - 4$ и $y = 2x + 2$

4. При каких значениях k прямая $y = kx + 1$ касается параболы $y = x^2 - 2x + 3$?

1) Составьте уравнение и найдите дискриминант

2) Приравняйте дискриминант к нулю

3) Найдите k

5. Решите системы уравнений с дробными коэффициентами:

1) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x^2 + x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = 0.5x^2 - 1.5x + 2 \\ y = 0.2x - 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 1 \\ y = \dfrac{1}{3}x + 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = 1.2x^2 - 0.8x + 0.5 \\ y = 0.4x - 0.3 \end{cases}$

Системы с обратной пропорциональностью

Теория

В этой главе мы рассмотрим системы уравнений, в которых одно уравнение — линейное (прямая), а другое — уравнение обратной пропорциональности $xy = a$ (гипербола). Такие системы также решаются методом подстановки.

Общий вид системы:

$$\begin{cases} xy = a \\ y = kx + b \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} xy = a \\ x + y = b \end{cases}$$

Метод решения:

1. Из линейного уравнения выражаем одну переменную через другую.
2. Подставляем в уравнение $xy = a$.
3. Решаем полученное уравнение (чаще всего квадратное).
4. Для каждого найденного x находим y из линейного уравнения.
5. Записываем ответ в виде пар (x, y).

Важное замечание: В уравнении $xy = a$ переменные не могут равняться нулю (если $a \neq 0$). При решении нужно проверять, чтобы найденные корни не обращали знаменатели в ноль (если они есть) и чтобы x и y были допустимы.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Два решения

Решим систему:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Подставляем $y = x + 1$ в первое уравнение:

$$x(x + 1) = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

Находим y:

$$x_1 = -3 \Rightarrow y_1 = -3 + 1 = -2$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 + 1 = 3$$

Проверяем, что ни одно из значений не обращает произведение в ноль — всё в порядке.
Ответ: $(-3, -2)$ и $(2, 3)$.

Пример 2

Одно решение

Решим систему:

$$\begin{cases} xy = 4 \\ y = 2x \end{cases}$$

Подставляем:

$$x \cdot 2x = 4$$
$$2x^2 = 4$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

Находим y:

$$x_1 = \sqrt{2} \Rightarrow y_1 = 2\sqrt{2}$$
$$x_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_2 = -2\sqrt{2}$$

Получили два решения, а не одно. Значит, система всегда имеет два решения, если дискриминант положителен.

Пример 3

Нет решений

Решим систему:

$$\begin{cases} xy = -4 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Подставляем:

$$x(x+3) = -4$$
$$x^2 + 3x + 4 = 0$$
$$D = 9 - 16 = -7 < 0$$

Дискриминант отрицательный — решений нет.
Ответ: система не имеет решений.

Пример 4

Система вида $\begin{cases} xy = a \\ x + y = b \end{cases}$

Решим систему:

$$\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Эта система уже знакома нам по теореме Виета. Здесь x и y — корни квадратного уравнения $t^2 - 7t + 12 = 0$:

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$
$$D = 49 - 48 = 1$$
$$t_1 = \frac{7-1}{2} = 3, \quad t_2 = \frac{7+1}{2} = 4$$

Значит, x и y — это числа 3 и 4 в любом порядке.
Ответ: $(3, 4)$ и $(4, 3)$.

Пример 5

Система с отрицательными значениями

Решим систему:

$$\begin{cases} xy = -6 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Составляем квадратное уравнение:

$$t^2 + t - 6 = 0$$
$$D = 1 + 24 = 25$$
$$t_1 = \frac{-1-5}{2} = -3, \quad t_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

Значит, x и y — это числа -3 и 2 в любом порядке.
Ответ: $(-3, 2)$ и $(2, -3)$.

Пример 6

Система с дробными корнями

Решим систему:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Квадратное уравнение:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$D = 9 - 8 = 1$$
$$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Ответ: $(1, 2)$ и $(2, 1)$.

Пример 7

Система с одним решением (когда дискриминант равен нулю)

Решим систему:

$$\begin{cases} xy = 9 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Квадратное уравнение:

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$
$$(t-3)^2 = 0$$
$$t = 3$$

Значит, $x = 3$, $y = 3$ — единственное решение (хотя формально это два одинаковых числа).
Ответ: $(3, 3)$.

Задачи

1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 6 \\ y = x + 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = 8 \\ y = x + 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 12 \\ y = x + 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = -6 \\ y = x - 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = -12 \\ y = x + 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy = 20 \\ y = x + 8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy = 10 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy = 15 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} xy = 18 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} xy = -8 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} xy = 24 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy = 30 \\ y = 5x - 5 \end{cases}$

2. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = 20 \\ x + y = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 30 \\ x + y = 11 \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy = 15 \\ x + y = 8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy = -6 \\ x + y = -1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy = -12 \\ x + y = -4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} xy = -20 \\ x + y = -1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} xy = 9 \\ x + y = 6 \end{cases}$

11) $\begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy = 25 \\ x + y = 10 \end{cases}$

3. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ y = x + \frac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = \frac{3}{4} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 0.5 \\ y = x + 0.5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = 1.2 \\ x + y = 2.2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = \frac{5}{6} \\ x + y = \frac{11}{6} \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy = 0.75 \\ x + y = 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy = \frac{2}{3} \\ y = x + \frac{1}{3} \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy = \frac{5}{8} \\ y = 2x - \frac{1}{2} \end{cases}$

9) $\begin{cases} xy = 1.5 \\ y = x + 0.5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} xy = 2.4 \\ x + y = 3.4 \end{cases}$

11) $\begin{cases} xy = \frac{7}{12} \\ x + y = \frac{13}{12} \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy = 0.6 \\ x + y = 1.6 \end{cases}$

13) $\begin{cases} xy = \frac{4}{5} \\ y = 2x - \frac{3}{5} \end{cases}$

14) $\begin{cases} xy = \frac{9}{10} \\ y = x + \frac{3}{10} \end{cases}$

15) $\begin{cases} xy = 1.8 \\ x + y = 2.8 \end{cases}$

16) $\begin{cases} xy = \frac{11}{12} \\ x + y = \frac{23}{12} \end{cases}$

17) $\begin{cases} xy = 0.4 \\ y = x + 1.2 \end{cases}$

18) $\begin{cases} xy = \frac{2}{5} \\ y = 3x - \frac{4}{5} \end{cases}$

4. Определите, сколько решений имеет система:

1) $\begin{cases} xy = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy = 10 \\ y = x + 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy = -4 \\ y = x + 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = 9 \\ x + y = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 7 \end{cases}$

7) $\begin{cases} xy = -6 \\ x + y = -1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy = -8 \\ x + y = 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$

Системы с окружностью

Теория

В этой главе мы рассмотрим системы уравнений, в которых одно уравнение задаёт окружность, а другое — прямую. Такие системы также решаются методом подстановки.

Уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

где R — радиус окружности с центром в начале координат.

Общий вид системы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = kx + b \end{cases}$$

Метод решения:

1. Из линейного уравнения выражаем y через x (или наоборот).
2. Подставляем в уравнение окружности.
3. Решаем полученное квадратное уравнение относительно x.
4. Для каждого найденного x находим y из линейного уравнения.
5. Записываем ответ в виде пар (x, y).

Сколько решений может быть? Квадратное уравнение может иметь:

- два различных корня — прямая пересекает окружность в двух точках;
- один корень (дискриминант равен нулю) — прямая касается окружности;
- нет корней — прямая и окружность не пересекаются.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Два решения

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Подставляем $y = x + 1$ в первое уравнение:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x + 1 - 25 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$D = 1 + 48 = 49$$

$$x_1 = \frac{-1 - 7}{2} = -4, \quad x_2 = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

Находим y:

$$x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = -4 + 1 = -3$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3 + 1 = 4$$

Ответ: $(-4, -3)$ и $(3, 4)$.

Пример 2

Касание (одно решение)

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

Подставляем:

$$x^2 + (x+4)^2 = 8$$
$$x^2 + x^2 + 8x + 16 = 8$$
$$2x^2 + 8x + 8 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$(x+2)^2 = 0$$
$$x = -2$$

Находим y:

$$y = -2 + 4 = 2$$

Ответ: $(-2, 2)$ — прямая касается окружности в этой точке.

Пример 3

Нет решений

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Подставляем:

$$x^2 + (x+3)^2 = 4$$
$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 4$$
$$2x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$D = 36 - 40 = -4 < 0$$

Дискриминант отрицательный — решений нет.
Ответ: система не имеет решений (прямая не пересекает окружность).

Пример 4

Прямая вида $x = a$

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = 3 \end{cases}$$

Подставляем $x = 3$ в первое уравнение:

$$9 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 16$$
$$y = \pm 4$$

Ответ: $(3, 4)$ и $(3, -4)$.

Пример 5

Прямая вида $y = b$

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = -1 \end{cases}$$

Подставляем:

$$x^2 + 1 = 10$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$

Ответ: $(3, -1)$ и $(-3, -1)$.

Пример 6

Окружность с центром не в начале координат

В 9 классе обычно рассматривают окружности с центром в начале координат. Но бывают и более сложные случаи:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Здесь центр окружности в точке $(2, -1)$, радиус 5. Решается аналогично — подстановкой.

Подставляем $y = 2x - 3$:

$$(x-2)^2 + (2x - 3 + 1)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + (2x-2)^2 = 25$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (4x^2 - 8x + 4) = 25$$

$$5x^2 - 12x + 8 = 25$$

$$5x^2 - 12x - 17 = 0$$

$$D = 144 + 340 = 484 = 22^2$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 22}{10} = \frac{34}{10} = 3.4 \text{ и } \frac{-10}{10} = -1$$

Находим y:

$$x_1 = 3.4 \Rightarrow y_1 = 2 \cdot 3.4 - 3 = 6.8 - 3 = 3.8$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3 = -5$$

Ответ: $(3.4, 3.8)$ и $(-1, -5)$.

Задачи

1. Решите системы уравнений с окружностью и прямой:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x + 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x - 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x + 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = x - 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = x + 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = x - 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ y = x + 3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ y = x - 3 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ y = 4x - 1 \end{cases}$

2. Решите системы уравнений с вертикальными и горизонтальными прямыми:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = -4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x = -1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = -2 \end{cases}$

3. Определите, сколько решений имеет система (не решая полностью):

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x + 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x + 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x + 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x + 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x + 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$

4. Найдите точки пересечения окружности и прямой:

1) $x^2 + y^2 = 13$ и $y = x + 1$

2) $x^2 + y^2 = 13$ и $y = x - 1$

3) $x^2 + y^2 = 20$ и $y = 2x$

4) $x^2 + y^2 = 20$ и $y = -2x$

5) $x^2 + y^2 = 26$ и $y = x + 4$

6) $x^2 + y^2 = 26$ и $y = x - 4$

7) $x^2 + y^2 = 29$ и $y = 2x - 3$

8) $x^2 + y^2 = 29$ и $y = 2x + 3$

9) $x^2 + y^2 = 34$ и $y = 3x - 5$

5. Решите системы уравнений с окружностью, центр которой не в начале координат:

1) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ y = x + 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9 \\ y = x + 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 = 10 \\ y = x - 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 = 20 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x+3)^2 + (y-2)^2 = 18 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 13 \\ y = x + 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 = 17 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

Системы с суммой квадратов и суммой

Теория

В этой главе мы рассмотрим системы уравнений, где одно уравнение — сумма квадратов переменных, а другое — их сумма. Такие системы решаются с помощью выражения одной переменной через другую и подстановки, либо с использованием формул сокращённого умножения.

Общий вид системы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}$$

Метод решения:

1. Из линейного уравнения выражаем одну переменную через другую, например $y = b - x$.
2. Подставляем в первое уравнение:
$$x^2 + (b - x)^2 = a$$
3. Раскрываем скобки и приводим подобные:
$$x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = a$$
$$2x^2 - 2bx + (b^2 - a) = 0$$
4. Решаем полученное квадратное уравнение относительно x.
5. Для каждого найденного x находим $y = b - x$.
6. Записываем ответ в виде пар (x, y).

Связь с $(x + y)^2$: Можно также использовать формулу:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Отсюда:

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{b^2 - a}{2}$$

Зная $x + y = b$ и $xy = \frac{b^2-a}{2}$, мы получаем систему, сводящуюся к теореме Виета. Тогда x и y — корни квадратного уравнения:

$$t^2 - bt + \frac{b^2 - a}{2} = 0$$

Этот способ иногда удобнее, особенно когда числа подобраны красиво.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Два решения

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Способ 1 (подстановка): Выразим $y = 7 - x$. Подставляем:

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25$$
$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$$
$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$D = 49 - 48 = 1$$
$$x_1 = \frac{7 - 1}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{7 + 1}{2} = 4$$

$$y_1 = 7 - 3 = 4, \quad y_2 = 7 - 4 = 3$$

Ответ: $(3,4)$ и $(4,3)$.

Способ 2 (через теорему Виета): Найдём произведение:

$$xy = \frac{7^2 - 25}{2} = \frac{49 - 25}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Составляем квадратное уравнение:

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

Корни: $t = 3$ и $t = 4$. Значит, x и y — это числа 3 и 4 в любом порядке.

Пример 2

Одно решение

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Найдём произведение:

$$xy = \frac{6^2 - 18}{2} = \frac{36 - 18}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Квадратное уравнение:

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0$$

$$t = 3$$

Значит, $x = 3$, $y = 3$ — единственное решение.

Ответ: $(3,3)$.

Пример 3

Нет решений

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Найдём произведение:

$$xy = \frac{5^2 - 10}{2} = \frac{25 - 10}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

Квадратное уравнение:

$$t^2 - 5t + 7.5 = 0$$

$$D = 25 - 30 = -5 < 0$$

Дискриминант отрицательный — решений нет.

Ответ: система не имеет решений.

Пример 4

Отрицательная сумма

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Найдём произведение:

$$xy = \frac{(-2)^2 - 10}{2} = \frac{4 - 10}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Квадратное уравнение:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$t_1 = \frac{-2-4}{2} = -3, \quad t_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Значит, x и y — это числа -3 и 1 в любом порядке.
Ответ: $(-3, 1)$ и $(1, -3)$.

Пример 5

Дробные корни

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Найдём произведение:

$$xy = \frac{3^2 - 5}{2} = \frac{9-5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Квадратное уравнение:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Ответ: $(1, 2)$ и $(2, 1)$.

Пример 6

Иррациональные корни

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Найдём произведение:

$$xy = \frac{3^2 - 7}{2} = \frac{9-7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Квадратное уравнение:

$$t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ и $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Задачи

1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 0 \end{cases}$

2. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y=-4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x+y=-2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=-5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=-3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=-6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=-4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=-7 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=-5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+y=-5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+y=-3 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2+y^2=26 \\ x+y=-6 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2+y^2=26 \\ x+y=-4 \end{cases}$

3. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{5}{2} \\ x+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{13}{2} \\ x+y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=2.5 \\ x+y=2.5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=4.5 \\ x+y=3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{2} \\ x+y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2=6.5 \\ x+y=3.5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{25}{2} \\ x+y=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+y^2=8.5 \\ x+y=4.5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{37}{2} \\ x+y=\dfrac{11}{2} \end{cases}$

4. Определите, сколько решений имеет система:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x+y=4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x+y=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x+y=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x+y=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x+y=4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x+y=3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+y=1 \end{cases}$

Системы с суммой квадратов и произведением

Теория

В этой главе мы рассмотрим системы уравнений, где одно уравнение — сумма квадратов переменных, а другое — их произведение. Такие системы решаются с использованием формулы квадрата суммы.

Общий вид системы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$$

Метод решения:

1. Используем формулу $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
2. Подставляем известные значения:
$$(x + y)^2 = a + 2b$$
3. Отсюда находим $x + y = \pm\sqrt{a + 2b}$ (если $a + 2b \geq 0$).
4. Получаем две системы (для каждого знака):
$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = b \end{cases}$$
где $s = \sqrt{a + 2b}$ или $s = -\sqrt{a + 2b}$.
5. Каждая из этих систем решается через теорему Виета: x и y — корни уравнения $t^2 - st + b = 0$.
6. Проверяем, чтобы дискриминант был неотрицательным.
7. Записываем все полученные пары (x, y).

Важное замечание: Не забываем, что $a + 2b$ должно быть неотрицательным, иначе решений нет.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Две пары решений

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Находим $(x + y)^2 = 25 + 2 \cdot 12 = 25 + 24 = 49$. Значит, $x + y = \pm 7$.

Случай 1: $x + y = 7$, $xy = 12$. Составляем квадратное уравнение: $t^2 - 7t + 12 = 0$.

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$t_1 = \frac{7 - 1}{2} = 3, \quad t_2 = \frac{7 + 1}{2} = 4$$

Получаем пары $(3, 4)$ и $(4, 3)$.

Случай 2: $x + y = -7$, $xy = 12$. Уравнение: $t^2 + 7t + 12 = 0$.

$$D = 49 - 48 = 1$$

$$t_1 = \frac{-7 - 1}{2} = -4, \quad t_2 = \frac{-7 + 1}{2} = -3$$

Получаем пары $(-4, -3)$ и $(-3, -4)$.

Ответ: $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(-4, -3)$, $(-3, -4)$.

Пример 2

Одна пара решений (с учётом знака)

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Находим $(x+y)^2 = 10 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16$. Значит, $x + y = \pm 4$.

Случай 1: $x + y = 4$, $xy = 3$. Уравнение: $t^2 - 4t + 3 = 0$.

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$t_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Пары: $(1, 3)$ и $(3, 1)$.

Случай 2: $x + y = -4$, $xy = 3$. Уравнение: $t^2 + 4t + 3 = 0$.

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$t_1 = \frac{-4-2}{2} = -3, \quad t_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$$

Пары: $(-3, -1)$ и $(-1, -3)$.

Ответ: четыре пары, как в примере 1.

Пример 3

Две пары (когда сумма только одного знака)

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Находим $(x+y)^2 = 5 + 2 \cdot 2 = 5 + 4 = 9$. Значит, $x + y = \pm 3$.

Случай 1: $x + y = 3$, $xy = 2$. Уравнение: $t^2 - 3t + 2 = 0$.

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Пары: $(1, 2)$ и $(2, 1)$.

Случай 2: $x + y = -3$, $xy = 2$. Уравнение: $t^2 + 3t + 2 = 0$.

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_1 = \frac{-3-1}{2} = -2, \quad t_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

Пары: $(-2, -1)$ и $(-1, -2)$.

Ответ: четыре пары.

Пример 4

Одно решение (когда дискриминант равен нулю)

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Находим $(x+y)^2 = 8 + 2 \cdot 4 = 8 + 8 = 16$. Значит, $x + y = \pm 4$.

Случай 1: $x + y = 4$, $xy = 4$. Уравнение: $t^2 - 4t + 4 = 0$.

$$(t-2)^2 = 0$$

$$t = 2$$

Пары: $(2, 2)$.

Случай 2: $x + y = -4$, $xy = 4$. Уравнение: $t^2 + 4t + 4 = 0$.

$$(t+2)^2 = 0$$

$$t = -2$$

Пары: $(-2, -2)$.

Ответ: $(2, 2)$ и $(-2, -2)$.

Пример 5

Нет решений

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Находим $(x+y)^2 = 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$. Значит, $x + y = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.
Рассмотрим первый случай: $x + y = 2\sqrt{2}$, $xy = 3$. Уравнение: $t^2 - 2\sqrt{2}t + 3 = 0$.

$$D = (2\sqrt{2})^2 - 12 = 8 - 12 = -4 < 0$$

Второй случай: $x + y = -2\sqrt{2}$, $xy = 3$. Уравнение: $t^2 + 2\sqrt{2}t + 3 = 0$.

$$D = 8 - 12 = -4 < 0$$

Дискриминант отрицательный в обоих случаях — решений нет.
Ответ: система не имеет решений.

Пример 6

Дробные корни

Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2} \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Находим $(x+y)^2 = \frac{5}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$. Значит, $x + y = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$.
Рассмотрим случай с плюсом: $x + y = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $xy = \frac{1}{2}$. Уравнение: $t^2 - \frac{\sqrt{14}}{2}t + \frac{1}{2} = 0$.

$$D = \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{4} - 2 = \frac{14}{4} - \frac{8}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{14} \pm \sqrt{6}}{4}$$

Аналогично для случая с минусом получим отрицательные корни.
Ответ: четыре пары с иррациональными числами.

Задачи

1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = -8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = -4 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = -5 \end{cases}$

2. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ xy=4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ xy=-4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ xy=9 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ xy=-9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2=32 \\ xy=16 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2=32 \\ xy=-16 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=50 \\ xy=25 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+y^2=50 \\ xy=-25 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=-1 \end{cases}$

3. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{5}{2} \\ xy=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{13}{2} \\ xy=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=2.5 \\ xy=1.5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=4.5 \\ xy=2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{17}{2} \\ xy=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2=6.5 \\ xy=2.5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{25}{2} \\ xy=\dfrac{11}{2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+y^2=8.5 \\ xy=3.5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{37}{2} \\ xy=\dfrac{17}{2} \end{cases}$

4. Определите, сколько решений имеет система:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ xy=4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ xy=5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ xy=-4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ xy=7 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ xy=8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ xy=-7 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=-2 \end{cases}$

Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали огромную работу. Поздравляю!

Системы уравнений — это тема, которая объединяет всё, что вы учили раньше: линейные уравнения, квадратные уравнения, графики функций, текстовые задачи. Здесь нужно не просто знать формулы, а уметь выбирать правильный метод решения и комбинировать разные приёмы.

В этой книге мы разобрали все основные типы систем уравнений, которые встречаются в школьной программе:

- начали с самого простого — линейных систем, которые решаются методом подстановки или сложения;
- научились решать текстовые задачи, переводя их условие на язык математики;
- освоили графический метод, который позволяет наглядно увидеть решение;
- перешли к системам с параболой и научились находить точки пересечения прямой и параболы;
- разобрались с системами, содержащими обратную пропорциональность (гиперболу);
- научились работать с окружностью и находить её пересечения с прямой;
- изучили системы, сводящиеся к теореме Виета, где нужно было находить числа по их сумме и произведению;
- освоили более сложные системы с суммой квадратов и суммой или произведением.

Но главное — мы научились главному: видеть, какой метод применить в каждом конкретном случае. Потому что в реальных примерах никто не пишет «решите систему методом подстановки» или «здесь нужно использовать теорему Виета». Вы просто видите систему и должны сами понять, как её решать. И чем больше у вас опыта, тем быстрее приходит это понимание.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз, порешайте дополнительные задачи. Математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость.

А если вам понравился такой формат — теория, примеры, много задач — у меня есть и другие книги. На сайте books.mrepetitor.com вы найдёте пособия по разным темам школьной математики и физики. Там же есть научно-популярные книги, которые я писал для тех учеников, кому интересно не только решать задачи, но и понимать, как устроен окружающий мир, как развивалась наука и какие люди стояли за великими открытиями.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если чувствуете, что нужна помощь, или хотите подготовиться к экзаменам — обращайтесь!

Желаю вам успехов в учёбе, побольше интересных задач и удовольствия от их решения!

Дмитрий Трепачёв